整数

2　最大公約数・最小公倍数

2　演習題

(1)

解答解説

最小公倍数 1512 を素因数分解すると，$2^3\cdot 3^3\cdot 7$ となるから，
2 数それぞれの約数を 2 の累乗で分類すると，
少なくとも一方は 2^3 を約数にもち，
他方は，2^3，2^2，2^1，2^0 を約数にもつ。
他方が 2^3 を約数にもつとすると，2 数の和 546 も 2^3 を約数にもつ。
ところが，$546=2\cdot 3\cdot 7\cdot 13$ より，546 は 2^3 を約数にもたない。
他方が 2^2 を約数にもつとすると，2 数の和 546 も 2^2 を約数にもつ。
ところが，$546=2\cdot 3\cdot 7\cdot 13$ より，546 は 2^2 を約数にもたない。
他方が 2^1 すなわち 2 を約数にもつとすると，2 数の和 546 も 2 を約数にもつ。
$546=2\cdot 3\cdot 7\cdot 13$ より，546 は 2 を約数にもつ。
他方が 2^0 すなわち 1 を約数にもつとすると，2 数の和 546 は 2 を約数にもたない。
ところが，$546=2\cdot 3\cdot 7\cdot 13$ より，546 は 2 を約数にもつ。
よって，他方は 2 を約数にもつ。
同様に，
一方は 3^3 を，他方は 3 を約数にもつ。
7 は両方の約数である。
よって，2 数の候補は，$\left(2^3\cdot 3^3\cdot 7,\, 2\cdot 3\cdot 7\right)$ と $\left(2^3\cdot 3\cdot 7,\, 2\cdot 3^3\cdot 7\right)$ であり，
これらのうち，2 数の和が 546 となるのは，$\left(2^3\cdot 3\cdot 7,\, 2\cdot 3^3\cdot 7\right)$　すなわち $(168, 378)$ である。

別解

2 数を A, B とし，最大公約数を g とすると，
$A=ag$，$B=bg$（a と b は互いに素で $a<b$ とする）と表せる。
よって，
A と B の最小公倍数 $abg=2^3\cdot 3^3\cdot 7$
A と B の和 $(a+b)g=2\cdot 3\cdot 7\cdot 13$
ここで，$a+b$ と ab の公約数を d とすると，
$a(a+b)-ab=a^2$ より，a^2 は d を約数にもつ。
（$\because\ a+b=pd$，$ab=qd$ とおくと，$a(a+b)-ab=apd-qd=(ap-q)d$ より，$a^2=(ap-q)d$）
$b(a+b)-ab=b^2$ より，b^2 も d を約数にもつ。
よって，a^2 と b^2 の公約数は d であり，これと a と b が互いに素であることから $d=1$，
すなわち $a+b$ と ab は互いに素である。

よって，$g=2\cdot3\cdot7=42$，$a+b=13$，$ab=2^2\cdot3^2=36$ であり，

a,b を解とする 2 次方程式は，$(t-a)(t-b)=0$ すなわち $t^2-(a+b)t+ab=0$ だから，

$t^2-13t+36=0 \quad \therefore (t-9)(t-4)=0$

$a<b$ とするから，$(a,b)=(9,4)$

よって，$A=ag=9\cdot42=378$，$B=bg=4\cdot42=168$

ゆえに，求める 2 数は，378 と 168

補足: $a+b$ と ab が互いに素であることの背理法による証明

ab が素数 p を約数にもつと仮定すると，a と b は互いに素だから，

a,b のどちらか一方が素数 p を約数にもつ。

一方，$a+b$ が素数 p を約数にもつためには，a,b の両方とも素数 p を約数にもたなければならず，これは a と b は互いに素であることに反する。

よって，ab と $a+b$ は共通の素数をもつことができない。

すなわち，ab と $a+b$ は互いに素である。

8　不定方程式／3 文字

8　演習題

(3)

100 円硬貨 x 枚，50 円硬貨 y 枚，10 円硬貨 z 枚，合計 k 枚使って 500 円になるとすると，

$10x+5y+z=50$　・・・①

$x+y+z=k$　・・・②

が成り立つ。

①，②の連立方程式の解は，①－②の解でもあるから，

$k=50-9x-4y$　・・・③　を満たす。

そこで，不定方程式③を満たす (x,y) の組を (x_1,y_1)，(x_2,y_2)（$x_1<x_2$）とすると，

$50-9x_1-4y_1=50-9x_2-4y_2$ より，$9(x_2-x_1)=-4(y_2-y_1)$ であり，

9 と 4 は互いに素だから，$x_2-x_1=4m$ とすると，$y_2-y_1=-9m$

これと $0\leq x\leq5$ より，$x_2-x_1=4m$ を満たす m は 1　$\therefore (x_1,x_2)=(0,4),(1,5)$

また，このとき $y_2-y_1=-9$ かつ $0\leq y\leq10$ より，$(y_1,y_2)=(9,0),(10,1)$

よって，k が等しくなる (x_1,y_1) と (x_2,y_2) の組は，

$(0,9)$ と $(4,0)$，$(0,10)$ と $(4,1)$，$(1,9)$ と $(5,0)$，$(1,10)$ と $(5,1)$ であり，

これと①より，k が等しくなる (x,y,z) の組は，

$(0,9,5)$ と $(4,0,10)$，$(0,10,0)$ と $(4,1,5)$，$(1,9,-5)$ と $(5,0,0)$，$(1,10,-10)$ と $(5,1,-5)$

これらのうちで x,y,z が 0 以上の整数である組は，$(0,9,5)$ と $(4,0,10)$，$(0,10,0)$ と $(4,1,5)$

以上より，支払う硬貨の枚数の合計が同じで，支払い方が違う場合の例は，

合計枚数が 14 枚のときの $(0,9,5)$ と $(4,0,10)$，

合計枚数が 10 枚のときの $(0,10,0)$ と $(4,1,5)$ である。

10　合同式の活用

10　演習題

（ア）別解

$$91^{91}=(90+1)^{91}$$
$$=\sum_{k=0}^{91}{}_{91}\mathrm{C}_k\,90^k$$
$$={}_{91}\mathrm{C}_0\,90^0+{}_{91}\mathrm{C}_1\,90^1+\sum_{k=2}^{91}90^k$$
$$=1+91\cdot 90+100\sum_{k=0}^{89}90^k$$

$90\equiv -10\pmod{100}$，$91\equiv -9\pmod{100}$ より，$91\cdot 90\equiv 90\pmod{100}$　$\therefore (1+91\cdot 90)\equiv 91\pmod{100}$

よって，$91^{91}\equiv 91\pmod{100}$

（イ）

(2)

解答解説

3^n を 7 で割った余りを r_n とすると，

3^{n+1} を 7 で割った余りは $3r_n$ を 7 で割った余りである。

3^{n+2} を 7 で割った余りは 3^2r_n を 7 で割った余りである。

これを続けていくと，

7 で割った余りは $\{1,2,3,4,5,6\}$ に限られるため（$\because$ 3 と 7 は互いに素）

7 で割った余りがどこかで再び r_n となる。

すると，次の余りは $3r_n$ を 7 で割った余りとなる。

こうして，余りの順列の単位が繰り返される。

このことを踏まえると，

$f(1)=3, f(2)=2, f(3)=6, f(4)=4, f(5)=5, f(6)=1, f(7)=3$ より，

3^n を 7 で割った余りは，3,2,6,4,5,1 の 6 個を単位とする順列が繰り返される。

これを一般化すると，

$f(6n-5)=3$，　$f(6n-4)=2$，　$f(6n-3)=6$，　$f(6n-2)=4$，　$f(6n-1)=5$，　$f(6n)=1$

あるいは,

$f(a)=f(b)$ ならば 6 で割った余りが a と b で等しい，すなわち $a\equiv b\pmod 6$

ということになる。

$f(17x)=f(4)$ の解

6 で割った余りが $17x$ と 4 とで等しいから，$17x-4$ は 6 の倍数である。　$\therefore x=2$

あるいは，$17x\equiv 4\pmod 6$，$12x\equiv 0\pmod 6$ より，$17x-12x\equiv 4-0\pmod 6$

$\therefore 5x\equiv 4\pmod 6$　$\therefore x=2$

$f(5y)=f(y+10)$ の解

6 で割った余りが $5y$ と $y+10$ とで等しいから，

$5y-(y+10)$ すなわち $4y-10$ は 6 の倍数である。　$\therefore y=1,4$

あるいは，

$5y\equiv y+10 \pmod 6$，　$y+4\equiv y+4 \pmod 6$ より，

$5y-(y+4)\equiv y+10-(y+4) \pmod 6$　$\therefore 4(y-1)\equiv 6\equiv 0 \pmod 6$　$\therefore y=1,4$

$f(z^2+3)=f(4)$ の解

6 で割った余りが z^2+3 と 4 とで等しいから，

z^2+3-4 すなわち z^2-1 は 6 の倍数である。　$\therefore z=1,5$

補充問題

数列の漸化式と倍数の問題

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n$　$(n=1,2,\cdots)$

(1)　a_n が偶数となることと，n が 3 の倍数となることは同値であることを示せ。

(2)　a_n が 10 の倍数となるための条件を(1)と同様の形式で求めよ。

（東大理系）

解

(1)

a_n を 2 で割った余りを b_n （b_n は 0 または 1 とする）とすると，

$a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n=2(a_{n+1}-4a_n)+a_{n+1}+a_n$ より，

b_{n+2} は $a_{n+1}+a_n$ を 2 で割った余り，すなわち $b_{n+1}+b_n$ を 2 で割った余りである。

補足

あるいは，$a_n=2p_n+b_n$ とすると，$a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n$ より，

$2p_{n+2}+b_{n+2}=6p_{n+1}+3b_{n+1}-14p_n-7b_n$

$2p_{n+2}$，$6p_{n+1}$ $14p_n$ を 2 で割った余りは 0 だから，$0+b_{n+2}=0+3b_{n+1}-0-7b_n$ より，

$b_{n+2}=3b_{n+1}-7b_n=2(b_{n+1}-4b_n)+b_{n+1}+b_n$

よって，b_{n+2} は $b_{n+1}+b_n$ を 2 で割った余りである。

$b_1=1$，$b_2=1$ より，$b_1+b_2=2$　$\therefore b_3=0$

$b_2+b_3=1$ より $b_4=1$，　$b_3+b_4=1$ より $b_5=1$

よって，b_4 と b_5 から b_6 を求めるのは，$b_1=1$，$b_2=1$ から b_3 を求めた場合と同じになる。

したがって，数列 $\{b_n\}$ は，

$n=1,2,3,4,5,6,\cdots$ に対して，$1,1,0,1,1,0,\cdots$ と 1,1,0 が繰り返されたものとなる。

よって，n が 3 の倍数のとき $b_n=0$ すなわち a_n は偶数となり，また，その逆も成り立つ。

(2)

a_n が 2 の倍数すなわち偶数かつ 5 の倍数ならば a_n は 10 の倍数となる。

a_n が偶数となるのは，(1)より，n が 3 の倍数のときであった。

そこで，まず a_n が 5 の倍数となるための n の条件を求めることにする。

a_n を 5 で割った余りを c_n （c_n は 0 以上 4 以下の整数とする）とすると，

$a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n=5\cdot(-2a_n)+3(a_{n+1}+a_n)$ より，

c_{n+2} は $3(a_{n+1}+a_n)$ を 5 で割った余り，すなわち $3(c_{n+1}+c_n)$ を 5 で割った余りである。

$c_1=1$，$c_2=3$ より，$3(c_2+c_1)=12$　$\therefore c_3=2$

$c_2=3$，$c_3=2$ より，$3(c_3+c_2)=15$　$\therefore c_4=0$

$c_3=2$，$c_4=0$ より，$3(c_4+c_3)=6$　$\therefore c_5=1$

$c_4=0$ $c_5=1$，より，$3(c_5+c_4)=3$　$\therefore c_6=3$

よって，c_5 と c_6 から c_7 を求めるのは，c_1 と c_2 から c_3 を求めた場合と同じになる。

したがって，数列 $\{c_n\}$ は，

$n=1,2,3,4,5,6,\cdots$ に対して，$1,3,2,0,1,3,2,0,\cdots$ と 1,3,2,0 が繰り返されたものとなる。

よって，n が 4 の倍数のとき $c_n=0$ すなわち a_n は 5 の倍数となる。

ゆえに，a_n が偶数かつ 5 の倍数，すなわち 10 の倍数となるのは，

n が 12 の倍数のときであり，また，その逆も成り立つ。

よって，求める条件は，n が 12 の倍数　・・・(答)

11　剰余による分類

(1)

逆に $m^2=3k$ ならば m は 3 を素因数にもつので，m は 3 の倍数である。

(2)

(2)だけで解いてみる

$m^2=27n+18$ を満たす m,n が存在すると仮定すると，

$m^2=3^2(3n+2)$ より，$3n+2$ は $3n+2=k^2$（k は 2 以上の自然数）と表せる。

自然数 k は自然数 l を用いて $3l,\ 3l\pm1$ と表せるが，

これらの 2 乗を 3 で割った余りはいずれも 2 とならない。

つまり，$k^2=3n+2$ を満たす k は存在しない。

よって，$m^2=27n+18$ を満たす m,n は存在しない。

12　連続 3 整数の積

(3)

別解

$$
\begin{aligned}
2n^3+9n^2+13n&=n(2n^2+9n+13)\\
&=n\{(n+1)(n+2)+(n-1)(n+1)+12\}\\
&=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)+12n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2n^3+9n^2+13n&=6n+3n(n+1)+2n^3+6n^2+4n\\
&=6n+3n(n+1)+2n(n+1)(n+2)
\end{aligned}
$$

など

12　演習題

(2)　別解

式の特徴と積が 30 になる状況から $f(n)$ をどんな形の式に変形すればよいか推測すると，
連続する 5 つの整数の式，たとえば $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ の n^5 の係数は 1 であるが，
$f(n)$ の n^5 の係数が 6 になっていることから，
「$f(n)$＝連続する 5 つの整数の積の 5 次式＋5 と連続する 3 つの整数の積を含む 5 次式」
と表すことができる可能性がある。

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 6n^5-15n^4+10n^3-n \\
&= n(n-1)(6n^3-9n^2+n+1) \\
&= n(n-1)\{(n+1)(n+2)(n-2)+g(n)\}
\end{aligned}
$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
g(n) &= 6n^3-9n^2+n+1-(n+1)(n+2)(n-2) \\
&= 6n^3-9n^2+n+1-(n^3+n^2-4n-4) \\
&= 5n^3-10n^2+5n+5 \\
&= 5(n^3-2n^2+n+1) \\
&= 5\{(n^3+1)+n(n-2)\} \\
&= 5(n+1)(n^2-n+1)+5n(n-2)
\end{aligned}
$$

$$\therefore f(n)=(n-2)(n-1)n(n-1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)(n^2-n+1)+5(n-2)n^2(n+1)$$

$(n-2)(n-1)n(n-1)(n+2)$ は，5 つの連続する整数の積だから 2 と 3 と 5 を因数にもつ。
$5(n-1)n(n+1)(n^2-n+1)$ と $5(n-2)n^2(n+1)$ は，3 つの連続する整数と 5 を含むから，
2 と 3 と 5 を因数にもつ。ゆえに，$f(n)$ は，2,3,5 を因数にもち，30 で割り切れる

14　$ax+by=c$

(1)　別解

$|m+n|=k$ とすると，$m+n=\pm k$　$\therefore n=-m\pm k$

これを $3m+5n=1$ に代入して整理すると，$-2m\pm 5k=1$　$\therefore k=\pm\dfrac{2m+1}{5}$

$k=\dfrac{2m+1}{5}$ のとき

$k>0$ より，$m=2$ のとき k は最小値 1 をとる。

また，$n=\dfrac{-3m+1}{5}$ より，このとき $n=-1$ となる。

$k=-\dfrac{2m+1}{5}$ のとき

$k>0$ より，$m=-3$ のとき k は最小値 1 をとる。

また，$n=\dfrac{-3m+1}{5}$ より，このとき $n=2$ となる。

以上より，$|m+n|$ は，$(m,n)=(-3,2),\ (2,-1)$ のとき，最小値 1 をとる。

(2)　別解

$100m+29n=1$ の特殊解をユークリッドの互除法を利用して求める。

方法の原理

100 と 29 は互いに素だから，最大公約数は 1 である。

よって，ユークリッドの互除法により，余り 1 となる式が得られる。

それを逆行すれば，$100m+29n=1$ の特殊解に至る。

特殊解を求める

$100=29\times 3+13$，$29=13\times 2+3$，$13=3\times 4+1$

$13=3\times 4+1$ より，$1=13-3\times 4$　・・・①

$29=13\times 2+3$ より，$3=29-13\times 2$　・・・②

②を①に代入すると，$1=13-(29-13\times 2)\times 4=13\times 9-29\times 4$

$\therefore 13\times 9-29\times 4=1$　・・・③

$100=29\times 3+13$ より，$13=100-29\times 3$　・・・④

④を③に代入すると，$(100-29\times 3)\times 9-29\times 4=1$　$\therefore 100\times 9+29\times(-31)=1$　・・・⑤

こうして，$100m+29n=1$ の特殊解 $(m,n)=(9,-31)$ が求められた。

一般解を求める

$100m+29n=1$ と⑤の各辺の差をとると，

$100(m-9)+29(n+31)=0$　$\therefore 100(m-9)=-29(n+31)$

100 と 29 は互いに素だから，$m-9=29k$（k は整数）とおくと，$n+31=-100k$

よって，$100m+29n=1$ を満たす整数 m,n の一般解は，$(m,n)=(29k+9,-100k-31)$

14　演習題

別解

$am+bn=q$ （a と b は互いに素）で q の絶対値が大きいときの処理

a と b は互いに素だから，$ax+by=1$ を満たす整数 (x,y) が存在し，

それをユークリッドの互除法を利用して求めることができるが，

いかんせん，q が大きいため，$am+bn=q$ の特殊解が $(m,n)=(qx,qy)$ と

その絶対値が大きくなってしまう。

そこで，q を a，b で割ることで，$q=a\alpha+b\beta+\gamma$ と表し，

$am+bn=a\alpha+b\beta+\gamma$ より，$a(m-\alpha)+b(n-\beta)=\gamma$ とすることで，

不定方程式を軽量化する。

解法

1623 を 25 の倍数と 17 の倍数を用いて表す。

$25>17$ より，まず 25 で割り，その余りを 17 で割るという手続きをとると，

$1623=25\cdot 64+23$，$23=17+6$ より，$1623=25\cdot 64+17+6$

よって，$25m+17n=25\cdot 64+17+6$　$\therefore 25(m-64)+17(n-1)=6$　・・・①

$25=17+8$，$17=8\cdot 2+1$ より，$1=17-8\cdot 2=17-(25-17)\cdot 2=25\cdot(-2)+17\cdot 3$

$\therefore 25\cdot(-6)+17\cdot 18=6$　・・・②

①－②より，$25(m-52)+17(n-19)=0$　$\therefore 25(m-52)=-17(n-19)$

25 と 17 は互いに素だから，$m-52=17k$ とおくと，$n-19=-25k$

よって，$(m,n)=(17k+52,-25k+19)$

(m,n) は正の整数の組だから，$17k+52>0$ かつ $-25k+19>0$　$\therefore k=-3,-2,-1,0$

ゆえに，$(m,n)=(1,94),(18,69),(35,44),(52,19)$

15　中国剰余定理

別解

条件を満たす整数は，$5m+3$ または $7n+6$ と表せるから，

$5m+3=7n+6$　$\therefore 5m-7n=3$　・・・①

また，$5\times 3-7\times 2=1$ より，$5\times 9-7\times 6=3$　・・・②

①－②より，$5(m-9)-7(n-6)=0$　$\therefore 5(m-9)=7(n-6)$

5 と 7 は互いに素だから，$m-9=7k$ （k は整数）とおける。

よって，条件を満たす整数は，$5m+3=5(7k+9)+3=35k+48$

$35k+48\leq 2009$ より，$k\leq \dfrac{1961}{35}<57$ よって，整数 k の最大値は 56

ゆえに，求める整数は，$35\times 56+48=2008$

15　演習題

(1)

別解

$1\leq i,j\leq p$ （$i\neq j$）とし，$x-iq$ を p で割った商を m，余りを r_i とすると，

$x-iq=mp+r_i$　・・・①

$x-jq$ を p で割った商を n，余りを r_j とすると，

$x-jq=np+r_j$　・・・②

①－②より，$(j-i)q=(m-n)p+r_i-r_j$

ここで，$r_i=r_j$ とすると，$(j-i)q=(m-n)p$

これと p と q が互いに素であることから，$j-i$ は p の 0 でない倍数である。

ところが，$1\leq |j-i|\leq p-1<p$ より，$j-i$ は p の 0 でない倍数になれない。

よって，$r_i=r_j$ とした仮定は正しくない。

ゆえに，題意が成り立つ。

17 *n* 進法

17 演習題

（ア）

$0.101_{(2)}$ を十進法で表すと，

$1\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}=\dfrac{5}{8}$ ・・・①

$0.101_{(2)}$ を三進法で表した数を $0.a_1a_2a_3\cdots_{(3)}$ とし，これを十進法で表すと，

$a_1\times 3^{-1}+a_2\times 3^{-2}+a_3\times 3^{-3}+a_4\times 3^{-4}+a_5\times 3^{-5}+\cdots$ ・・・②

①＝②より，

$\dfrac{5}{8}=a_1\times 3^{-1}+a_2\times 3^{-2}+a_3\times 3^{-3}+a_4\times 3^{-4}+a_5\times 3^{-5}+\cdots$ ・・・③

両辺を 3 倍後，左辺を整数部分と分数部分に分けると，

$1+\dfrac{7}{8}=a_1+a_2\times 3^{-1}+a_3\times 3^{-2}+a_4\times 3^{-3}+a_5\times 3^{-4}+\cdots$ より，$a_1=1$ であり，

これより，$\dfrac{7}{8}=a_2\times 3^{-1}+a_3\times 3^{-2}+a_4\times 3^{-3}+a_5\times 3^{-4}+\cdots$

両辺を 3 倍後，左辺を整数部分と分数部分に分けると，

$2+\dfrac{5}{8}=a_2+a_3\times 3^{-1}+a_4\times 3^{-2}+a_5\times 3^{-3}+\cdots$ より，$a_2=2$ であり，

これより，$\dfrac{5}{8}=a_3\times 3^{-1}+a_4\times 3^{-2}+a_5\times 3^{-3}+\cdots$ となり，③と同じ形の式が得られる。

よって，以後は a_1 の値と a_2 の値が交互に繰り返される，

つまり，$a_3=1,\quad a_4=2,\quad a_5=1,\quad a_6=2,\cdots$ と，1 と 2 が繰り返される。

よって，$0.101_{(2)}$ を三進法で表した数は，循環小数 $0.\dot{1}\dot{2}_{(3)}$ である。

（イ）

$a_{(10)}$ は小数だから，これを任意の進法で表した数も小数である。（後述の解説参照）

$a_{(10)}$ を 2 進法で表すと $0.p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_{k(2)}$ になるとすると，

$0.p_1p_2p_3\cdots p_{k(2)}$ を 10 進法で表すと $a_{(10)}$ になるから，

$\dfrac{p_1}{2}+\dfrac{p_2}{2^2}+\dfrac{p_3}{2^3}+\cdots\dfrac{p_{k-1}}{2^{k-1}}+\dfrac{p_k}{2^k}=a_{(10)}$ ・・・④

$a_{(10)}$ を 3 進法で表すと $0.q_1q_2q_3\cdots q_{l(3)}$ になるとすると，

$0.q_1q_2q_3\cdots q_{l(3)}$ を 10 進法で表すと $a_{(10)}$ になるから，

$\dfrac{q_1}{3}+\dfrac{q_2}{3^2}+\dfrac{q_3}{3^3}+\cdots+\dfrac{q_l}{3^l}=a_{(10)}$ ・・・⑤

④，⑤より，

$$\frac{p_1 \cdot 2^{k-1} + p_2 \cdot 2^{k-2} + p_3 \cdot 2^{k-3} + \cdots p_{k-1} \cdot 2 + p_k}{2^k} = \frac{q_1 \cdot 3^{l-1} + q_2 \cdot 3^{l-2} + q_3 \cdot 3^{l-3} + \cdots + q_l \cdot 3^l}{3^l}$$

よって，

$$3^l\left(p_1 \cdot 2^{k-1} + p_2 \cdot 2^{k-2} + p_3 \cdot 2^{k-3} + \cdots + p_{k-1} \cdot 2 + p_k\right) = 2^k\left(q_1 \cdot 3^{l-1} + q_2 \cdot 3^{l-2} + q_3 \cdot 3^{l-3} + \cdots + q_l \cdot 3^l\right)$$

ここで，④，⑤が 0 でない，すなわち $a_{(10)}$ が 0 でないと仮定すると，

3^l と 2^k は互いに素であるから，上式の等号が成立するためには，

$p_1 \cdot 2^{k-1} + p_2 \cdot 2^{k-2} + p_3 \cdot 2^{k-3} + \cdots + p_{k-1} \cdot 2 + p_k$ が 0 でない偶数であることが必要である。

しかし， p_k は 2 進法の小数の末尾故 1 となるため奇数になってしまう。

よって，その仮定は成り立たない。

ゆえに， $a_{(10)}$ は 0 である。

n 進法（記数法）

p 進法

p 進法 $(p \geq 2)$ の各位の数は 0 から $p-1$ までの p 個であり，

位の数が p になると桁が 1 つ上がる。

数字は整数部分 $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$ と小数部分 $b_1 b_2 \cdots b_{m-1} b_m$ を点で区切って，

$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n . b_1 b_2 \cdots b_{m-1} b_m$ と表現されるが，これは実は数字の簡略表現であり，

正確な表現は，

$$a_1 \times p^{n-1} + a_2 \times p^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \times p^1 + a_n \times p^0 + b_1 \times p^{-1} + b_2 \times p^{-2} + \cdots b_{m-1} \times p^{-(m-1)} + b_m \times p^{-m}$$

である。

また，

$p \geq 2$ より， p 進法が何進法であろうと，

整数部分 $a_1 \times p^{n-1} + a_2 \times p^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \times p^1 + a_n \times p^0$ は常に整数であり，

小数部分 $b_1 \times p^{-1} + b_2 \times p^{-2} + \cdots b_{m-1} \times p^{-(m-1)} + b_m \times p^{-m}$ は常に小数である。

例

$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n . b_1 b_2 \cdots b_{m-1} b_m$ が p 進法の数字であることを，

$(a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n . b_1 b_2 \cdots b_{m-1} b_m)_p$ と表すことにする。

すると，

10 進法の数字 23.75 の正確な表現は，

$$(23.75)_{10} = 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

2 進法の数字 101.11 の正確な表現は，

$$(101.11)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

である。

10 進法の数字を 2 進法の数字にする方法の原理

方法の原理

数字の簡略表現を正確な表現にし，

10 進法の正確な表現＝2 進法の正確な表現

をつくり，

$p \geq 2$ より，p 進法が何進法であろうと，

整数部分 $a_1 \times p^{n-1} + a_2 \times p^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \times p^1 + a_n \times p^0$ は常に整数であり，

小数部分 $b_1 \times p^{-1} + b_2 \times p^{-2} + \cdots b_{m-1} \times p^{-(m-1)} + b_m \times p^{-m}$ は常に小数である。

を利用して 2 進法の数字を求める。

例

$(23.75)_{10}$ を 2 進法で表してみよう。

$(23.75)_{10}$ を整数部分 $(23)_{10}$ と小数部分 $(0.75)_{10}$ に分け，それぞれを 2 進法で表す。

では，まず $(23)_{10}$ を 2 進法で表わしてみよう。

整数 $(23)_{10}$ は 2 進法で表しても整数だから，

$(23)_{10} = a_1 \times 2^{n-1} + a_2 \times 2^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \times 2^1 + a_n$ とすると，

$(23)_{10} = 2 \times 10^1 + 3 = 23$ より，

$23 = a_1 \times 2^{n-1} + a_2 \times 2^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \times 2^1 + a_n$

両辺を 2 で割ると，

$$11 + \frac{1}{2} = a_1 \times 2^{n-2} + a_2 \times 2^{n-3} + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}$$

10 進法の小数部分は 2 進法でも小数部分だから，$a_n = 1$

また，整数部分は，

$$11 = a_1 \times 2^{n-2} + a_2 \times 2^{n-3} + \cdots + a_{n-1}$$

両辺を 2 で割ると，

$$5 + \frac{1}{2} = a_1 \times 2^{n-3} + a_2 \times 2^{n-4} + \cdots + a_{n-2} + \frac{a_{n-1}}{2}$$

よって，

$$a_{n-1} = 1$$

$$5 = a_1 \times 2^{n-3} + a_2 \times 2^{n-4} + \cdots + a_{n-2}$$

両辺を 2 で割ると，

$$2 + \frac{1}{2} = a_1 \times 2^{n-4} + a_2 \times 2^{n-5} + \cdots + a_{n-3} + \frac{a_{n-2}}{2}$$

よって，

$$a_{n-2} = 1$$

$$2 = a_1 \times 2^{n-4} + a_2 \times 2^{n-5} + \cdots + a_{n-3}$$

両辺を 2 で割ると，

$$1=a_1\times 2^{n-5}+a_2\times 2^{n-6}+\cdots+a_{n-4}+\frac{a_{n-3}}{2}$$

よって，

$$a_{n-3}=0$$

$$1=a_1\times 2^{n-5}+a_2\times 2^{n-6}+\cdots+a_{n-4}$$

両辺を 2 で割ると

$$\frac{1}{2}=a_1\times 2^{n-6}+a_2\times 2^{n-7}+\cdots+a_{n-5}+\frac{a_{n-4}}{2}$$

よって，

$$a_{n-4}=1,\quad a_1=a_2=\cdots=a_{n-5}=0$$

以上より，

$$(23)_{10}=1\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2^1+1=(10111)_2 \quad \cdots ①$$

つまり，23 を商が 0 になるまで割り続け，その余りを下位から上位に書き並べればよい。

したがって，以下のように処理すればよい。

$$\begin{array}{l} 2\underline{)23} \\ 2\underline{)11}\cdots 1 \\ 2\underline{)\ 5}\cdots 1 \\ 2\underline{)\ 2}\cdots 1 \\ 2\underline{)\ 1}\cdots 0 \\ \quad\ 0\cdots 1 \end{array}$$

まとめると

q 進法の整数を r 進法の整数にするとき，

q 進法の整数の正確な表現 Q を求める。

Q を商が 0 になるまで r で割り続け，その余りを下位から上位に書き並べる。

次に，
$(0.75)_{10}$ を 2 進法で表してみよう。
$(0.75)_{10}$ は 2 進法でも小数部分だから，
$(0.75)_{10} = b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} + \cdots + b_{n-1} \times 2^{-n+1} + b_n \times 2^{-n}$ とすると，
$(0.75)_{10} = 7 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 0.75$ より，
$0.75 = b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} + \cdots + b_{n-1} \times 2^{-n+1} + b_n \times 2^{-n}$
両辺を 2 倍すると，
$1.5 = b_1 + b_2 \times 2^{-1} + \cdots + b_{n-1} \times 2^{-n+2} + b_n \times 2^{-n+1}$
よって，
$b_1 = 1$
$0.5 = b_2 \times 2^{-1} + \cdots + b_{n-1} \times 2^{-n+2} + b_n \times 2^{-n+1}$
両辺を 2 倍すると，
$1.0 = b_2 + b_3 \times 2^{-1} \cdots + b_{n-1} \times 2^{-n+3} + b_n \times 2^{-n+2}$
よって，
$b_2 = 1$， $b_3 = b_4 = \cdots = b_{n-1} = b_n = 0$
以上より，
$(0.75)_{10} = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = (0.11)_2$
つまり，
0.75 が整数になるまで 2 をかけ続け，
現れた整数部分を小数点以下第一位から順に書き並べればよい。
したがって，以下のように処理すればよい。

$$(0.75)_{10} = 0.75 = \frac{3}{4} = \frac{1 \times 2^1 + 1}{2^2} = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = (0.11)_2 \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

まとめると
q 進法の小数を r 進法の小数にするとき，
q 進法の小数の正確な表現 Q' を求める。
Q' が整数になるまで r をかけ続け，現れた整数部分を小数第一位から順に書き並べる。
あるいは，
$Q' \times r^l = Q''$ より，

$$Q' = \frac{Q'' \text{の} r \text{進法による正確な表現}}{r^l} = c_1 \times r^{-1} + c_2 \times r^{-2} + \cdots$$

①，②より，
$(23.75)_{10} = (10111.11)_2$

18　ガウス記号

18　演習題

(2)

別解

$[3x]=3[x]$ をみたす x

$3[x]\leq 3x<3[x]+1$，$[x]=1$ より，$3\leq 3x<4$　$\therefore 1\leq x<\dfrac{4}{3}$

$[3x]=3[x]+1$ をみたす x

$3[x]+1\leq 3x<3[x]+2$，$[x]=1$ より，$4\leq 3x<5$　$\therefore \dfrac{4}{3}\leq x<\dfrac{5}{3}$

$[3x]=3[x]+2$ をみたす x

$3[x]+2\leq 3x<3[x]+3$，$[x]=1$ より，$5\leq 3x<6$　$\therefore \dfrac{5}{3}\leq x<2$

(3)

別解

$[x]=a$ とすると，$a\leq x<a+1$ より，$3a\leq 3x<3a+3$　$\therefore [3x]=3a,3a+1,3a+2$

(ⅰ)　$[3x]=3a$ のとき

$[3x]-[x]=4$ より，$3a-a=4$　$\therefore a=2$　・・・①

$3a\leq 3x<3a+1$ より，$a\leq x<\dfrac{3a+1}{3}$　・・・②

①，②より，$2\leq x<\dfrac{7}{3}$

(ⅱ)　$[3x]=3a+1$ のとき

$[3x]-[x]=4$ より，$(3a+1)-a=4$　$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

$[x]=a$ より，a は整数だから不適

(ⅲ)　$[3x]=3a+2$ のとき

$[3x]-[x]=4$ より，$(3a+2)-a=4$　$\therefore a=1$　・・・③

$3a+2\leq 3x<3a+3$ より，$\dfrac{3a+2}{3}\leq x<a+1$　・・・④

③，④より，$\dfrac{5}{3}\leq x<2$

(ⅰ)または(ⅱ)または(ⅲ)より，$\dfrac{5}{3}\leq x<\dfrac{7}{3}$

式が単純な 1 次式だから，答だけで良いのならグラフから求める方が正確かつ手際よい。
赤色実線： $y=[3x]$，青色実線： $y=[x]$